

## Table des matières

1 Révisions de première année : induction	1
2 Équations de Maxwell	3
3 Énergie du champ électromagnétique	5
4 Propagation du champ électromagnétique dans le vide	6
5 Propagation du champ électromagnétique dans les milieux	7
6 Dipôle rayonnant	8
7 Champ aux interfaces	9
8 Sujets d'oraux	10
9 Pour aller plus loin...	10

## 1 Révisions de première année : induction

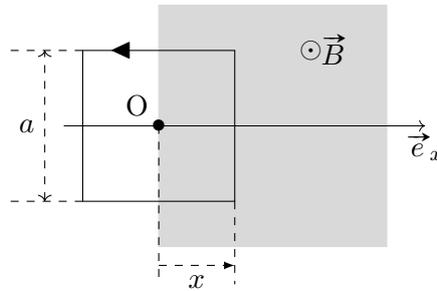
**Exercice 1 - Chauffage par induction :** Le chauffage par induction est beaucoup utilisé dans nos foyers avec les plaques de cuisson dites « à induction » mais également dans l'industrie pour chauffer fortement des matériaux afin de les ramollir ou les faire fondre. Nous présentons ici le chauffage par induction d'un anneau métallique placé dans une bobine.

On place un anneau métallique assimilé à une spire de rayon  $r = 2.5 \text{ cm}$  et de résistance  $R = 0.1 \Omega$  dans une bobine qu'on considérera comme infiniment longue possédant une densité linéique de spires  $n$ . On alimente la bobine par un courant sinusoïdal de la forme  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . La bobine et l'anneau ont le même axe de révolution  $Oz$ . Le champ à l'intérieur de la bobine infiniment longue, appelé solénoïde, vaut  $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$  où on aura orienté l'axe  $Oz$  par rapport au sens du courant dans la bobine et la règle de la main droite. On donne  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

1. Exprimer le flux magnétique à travers l'anneau.
2. En déduire la force électromotrice induite ainsi que le courant induit. On négligera l'auto-induction dans ce cas.
3. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans l'anneau en fonction du temps.
4. En déduire la puissance dissipée en moyenne.
5. Sachant que la bobine possède 200 spires par mètre et qu'on alimente avec une fréquence de 100 kHz, calculer l'amplitude courant  $I_0$  nécessaire pour chauffer avec une puissance de 500 W dans l'anneau.
6. Sachant que la capacité calorifique du cuivre est de  $c = 385 \text{ J/K/kg}$  et que la température de fusion est de  $1085 \text{ }^\circ\text{C}$ , combien de temps faut-il chauffer l'anneau de cuivre de 20 g pour qu'il fonde. On négligera toute perte thermique et on donnera ainsi une durée de chauffe minimale. On admet que la quantité d'énergie thermique à apporter pour faire passer une masse  $m$  de la température  $T_i$  à la température  $T_f$  vaut  $mc(T_f - T_i)$ .

**Exercice 2 - Cadre mobile dans un champ magnétique uniforme :** On considère une spire conductrice carrée, de côté  $a$ , de résistance  $R$ , d'inductance négligeable et de masse  $m$ , pouvant se déplacer sans frottement sur un plan horizontal suivant un axe  $Ox$ . Dans la portion de l'espace indiquée en grisé sur la figure règne un champ magnétique uniforme, dirigé vers le haut.

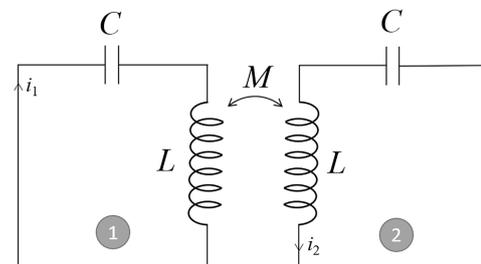
Si  $x < 0$ , la spire est complètement en dehors du champ magnétique ; elle y est complètement immergée si  $x > a$ . Pour  $x < 0$ , la vitesse de la spire est  $v_0 = v_0 \vec{e}_x$ .



1. Expliquer qualitativement le phénomène qui se produira au moment où la spire « entre » dans le champ magnétique.
2. Déterminer la f.é.m. induite ainsi que l'intensité du courant induit dans la spire pour  $0 < x < a$ .
3. En déduire l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la spire.
4. Établir l'équation différentielle dont la vitesse  $v(t)$  de la spire est solution puis déterminer  $v(t)$ .
5. Quel est le mouvement de la spire quand elle est complètement immergée dans le champ magnétique ? Quelle est sa vitesse ?

**Exercice 3 - Résonance de circuits LC couplés :** On considère les deux circuits LC identiques du schéma ci-dessous couplés via les bobines avec un coefficient d'inductance mutuelle  $M$ .

On note  $L$  les inductances et  $C$  les capacités. On note 1 le circuit de gauche et 2 celui de droite. Le condensateur 1 (à gauche) est initialement chargé avec une charge  $q_0$  sur l'armature de gauche et donc  $-q_0$  sur celle de droite. Le condensateur 2 (à droite) est initialement déchargé. À l'instant  $t = 0$  on ferme le circuit 1 à l'aide d'un interrupteur et on étudie l'évolution des charges des condensateurs au cours du temps.



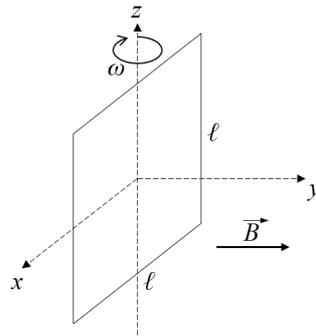
1. Établir les équations différentielles couplées sur les charges  $q_1$  et  $q_2$  des condensateurs 1 et 2. On posera  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $K = \frac{M}{L}$ , dont on donnera les significations.
2. En posant  $S = q_1 + q_2$  et  $A = q_1 - q_2$ , établir les équations différentielles découplées sur les nouvelles variables  $S$  et  $A$ . On posera les nouvelles pulsations caractéristique  $\omega_S$  et  $\omega_A$ .
3. Résoudre les équations sur  $S$  et  $A$ .
4. En déduire les expressions des charges  $q_1$  et  $q_2$  en fonction du temps et des conditions initiales. On les présentera sous forme d'un produit de fonctions sinusoïdales.

On ajoute dans le circuit 1 un générateur de tension sinusoïdale de la forme  $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ . On ne se préoccupe pas du régime transitoire.

5. Comment sont modifiés les équations différentielles couplés sur  $q_1$  et  $q_2$  ?
6. En se plaçant en régime sinusoïdal forcé et en posant  $\underline{q}_1 = \alpha_1 e^{j\omega t}$  et  $\underline{q}_2 = \alpha_2 e^{j\omega t}$ , déterminer les expressions de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  en fonction de  $E_0$ ,  $L$ ,  $\omega_0$ ,  $K$  et  $\omega$ .
7. Montrer que les racines du dénominateur commun à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont  $\omega_S$  et  $\omega_A$ . Factoriser celui-ci pour trouver les points de divergence.
8. Tracer les amplitudes  $a_1$  et  $a_2$  des charges  $q_1$  et  $q_2$  en fonction de la pulsation. Que remarque-t-on ?
9. En pratique, pourquoi la quantité de charge dans les condensateurs ne tendent pas vers l'infini ?

**Exercice 4 - Alternateur :** Un alternateur est un système permettant de transformer de la puissance mécanique en puissance électrique permettant ainsi que fabriquer de l'électricité afin de s'en servir pour autre chose. On considère un cadre métallique, de résistance  $R$ , carré de côté  $\ell$  qui tourne autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse angulaire constante  $\omega$  grâce à l'application d'un couple d'un opérateur  $\vec{\Gamma}_o$ . À  $t = 0$ , on prendra le vecteur surface de la spire aligné avec le champ magnétique.

Ce cadre est plongé dans un champ magnétique permanent et uniforme selon l'axe  $Oy$  :  $\vec{B} = B \vec{e}_y$ . Un schéma de la situation est présenté ci-dessous. On note  $J$  le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe  $Oz$ .



1. Retrouver la force électromotrice induite dans le cadre.
2. Ce cadre, et le courant induit qui le traverse, crée un champ magnétique qui crée un flux propre. On note alors  $L$  le coefficient d'auto-inductance. Écrire l'équation électrique du cadre dans ce cas.
3. Effectuer un bilan des moments pour en déduire l'équation mécanique.
4. Résoudre l'équation électrique pour trouver  $i(t)$ . On pourra chercher une solution particulière sous la forme  $\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ . Que se passe-t-il si on attend le régime permanent ?
5. En déduire le couple extérieur à fournir au cours du temps et en moyenne.
6. Montrer que l'ensemble de la puissance mécanique fournie est transformée en puissance électrique qui est dissipée par effet Joule.

<p><b>Éléments de réponse :</b></p> <p>1 - 2. <math>e(t) = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{di}{dt}(t)</math>; 4. <math>P_J = \frac{(\pi r^2 \mu_0 n I_0 \omega)^2}{2R}</math>; 5. 32 A; 6. 16 s.</p> <p>2 - 4. <math>m\dot{v} = -va^2 B^2/R</math> d'où <math>v(t) = v_0 \exp[-t/\tau]</math> avec <math>\tau = mR/(a^2 B^2)</math>; 5. <math>t_a =</math></p>	$-\tau \ln\left(1 - \frac{a}{v_0 \tau}\right)$ et $v_a = v_0 - a/\tau$ . <p>3 - 4. <math>\omega_S = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+K}}</math>, <math>\omega_A = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-K}}</math>,  <math>S(t) = q_0 \cos(\omega_S t)</math>, <math>A(t) = q_0 \cos(\omega_A t)</math>; 6. <math>\alpha_1 = \frac{E_0}{L} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - K^2 \omega^4}</math>,</p>	$\alpha_2 = \frac{E_0}{L} \frac{K\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - K^2 \omega^4}$ . <p>4 - 4. <math>i(t) = \frac{\ell^2 B \omega}{R} \frac{1}{1+(\tau\omega)^2} (\sin(\omega t) - \omega\tau \cos(\omega t))</math>; 5. <math>\langle \Gamma_o \rangle = -\frac{\ell^4 B^2 \omega}{2R} \frac{1}{1+(\tau\omega)^2}</math>;                  6. <math> \langle Ri^2(t)\omega \rangle  = \frac{\ell^4 B^2 \omega^2}{2R^2} \frac{1}{1+(\tau\omega)^2}</math>.</p>
---	---	--

## 2 Équations de Maxwell

**Exercice 5 - Utilisation de Maxwell-Gauss :** On considère une région vide de charge dans laquelle est établi un champ de la forme (en coordonnées cylindriques) :

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_z \vec{e}_z.$$

1. Quelle symétrie présente ce champ électrique ?
2. Quelle équation est vérifiée par ce champ électrique ?
3. Montrer que si l'on connaît le champ électrique sur l'axe  $\vec{E}(r = 0, z)$ , alors on peut calculer le champ électrique en un point proche de l'axe, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss en coordonnées cylindriques.

On rappelle en coordonnées cylindriques :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

**Exercice 6 - Solution ondulatoire des équations de Maxwell :** On se place dans le vide de charges et de courants :  $\vec{j}(M, t) = \vec{0}$  et  $\rho(M, t) = 0$  en tout point.

On considère le champ électrique suivant

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x + E_0 \sin(\omega t + kz) \vec{u}_y$$

avec  $k = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega$ .

Donner un champ magnétique associé pour que ce champ électrique soit solution des équations de Maxwell dans le milieu considéré.

**Exercice 7 - Solénoïde en régime variable :** On étudie un solénoïde de longueur  $\ell$  et de rayon  $a$ , constitué de  $N$  spires jointives. Ces dernières sont parcourues par un courant  $i(t)$ . On suppose  $\ell \gg a$ , de sorte que le solénoïde puisse être considéré comme infini. On suppose que le courant est suffisamment lentement variable pour se situer dans le cadre de l'ARQS magnétique.

1. Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  à l'intérieur du solénoïde. On supposera  $\vec{B} = \vec{0}$  à l'extérieur.
2. En établissant un parallèle formel entre les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'ARQS magnétique, justifier que le champ électrique est de la forme  $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_\theta$ .
3. On cherche le champ électrique vérifiant l'équation de Maxwell-Faraday. Calculer ce champ induit en fonction de  $\mu_0$ ,  $r$  et  $n = N/\ell$ . On se limitera au cas  $r < a$ .
4. En déduire la densité de courant de déplacement puis le champ magnétique  $\vec{B}_d$  issu de ce seul courant.
5. Vérifier en ordre de grandeur que  $\vec{B}_d$  est bien négligeable devant le champ  $B$  trouvé dans le cadre de l'ARQS magnétique.

Donnée :

$$\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z.$$

**Exercice 8 - Un photon de masse non-nulle :** La construction de la théorie sur laquelle s'appuie la description de l'interaction lumière-matière repose largement sur le fait que le photon (particule associée au champ électromagnétique dans une description quantique) a une masse non-nulle. Jusqu'ici, aucune expérience n'a pu mettre cette hypothèse en défaut. En effet, les expériences les plus récentes imposent une borne supérieure égale à  $10^{-52}$  kg pour la masse du photon.

Le but de cet exercice est d'analyser les conséquences d'une masse non-nulle du photon sur le potentiel électrique  $V$ . Les équations de Maxwell couplant les champs électrique et magnétique entre eux, cette modification de  $V$  aura des conséquences sur l'ensemble du champ électromagnétique.

Dans l'hypothèse d'un photon de masse  $m$  non-nulle, les équations de Maxwell avec source (les deux autres restent inchangées) se réécrivent

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \eta^2 V \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - \eta^2 \vec{A},$$

avec  $\eta = \frac{mc}{\hbar}$  et  $\vec{A}$  le potentiel vecteur vérifiant  $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ .

Considérons une sphère creuse de rayon  $R$  et de centre  $O$  chargée uniformément  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$  en surface. On cherche une solution des équations de Maxwell sous la forme

$$V(r, t) = \frac{f(r)}{r} \quad \text{et} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{0}.$$

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $f$  et la résoudre. On distinguera les cas  $0 < r < R$  et  $r > R$ . On imposera la continuité de  $V$ , que  $V$  reste borné lorsque  $r \rightarrow 0$  et enfin que  $V$  tend vers 0 à l'infini. On utilisera l'expression du laplacien en coordonnées sphériques  $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d^2(rV)}{dr^2}$ .
2. En utilisant la discontinuité du champ électrique à la traversée de la surface de la sphère

$$\vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r,$$

exprimer  $V$  en fonction de  $\sigma$ ,  $\eta$  et  $R$ . On supposera par la suite que  $\eta R \ll 1$  et on notera  $V(r=0) = V_0$ . Pourquoi trouve-t-on ici une expression du champ électrique différente de celle que donnerait le théorème de Gauss ?

3. Donner une expression approchée de  $V$  au voisinage de  $r = 0$  au premier ordre en  $\eta^2 r^2$ .
4. Entre deux sphères concentriques dont les rayons diffèrent de 9 cm, on mesure une variation relative du potentiel de  $|\delta V/V| < 0.32 \times 10^{-9}$ . Commenter.

Éléments de réponse :

<p>5 - 3. <math>E_r \simeq -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(r=0, z)</math>.</p> <p>6 - <math>\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{c} \sin(\omega t + kz) \vec{u}_x -</math></p>	<p><math>\frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y</math>.</p> <p>7 - 3. <math>\vec{E} = -\frac{\mu_0 r n}{2} \frac{di}{dt} \vec{e}_\theta</math>; 4. <math>\vec{B}_d(r) =</math></p> <p><math>-\frac{\epsilon_0 \mu_0^2 r^2 n}{6} \frac{d^2 i}{dt^2} \vec{e}_z</math>; 5. <math>B_d \sim \left(\frac{a\omega}{c}\right)^2 B</math>.</p>	<p>8 - 2. <math>V(r &lt; R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} e^{-\eta R} \frac{\sinh \eta r}{\eta r}</math></p> <p>et <math>V(r &gt; R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{\sinh \eta R}{\sinh \eta r} e^{-\eta r}</math>; 3.</p> <p><math>V \simeq V_0 \left(1 + \frac{\eta^2 r^2}{6}\right)</math>; 4. <math>4.07 \times 10^{-47}</math> kg.</p>
---	--	--

### 3 Énergie du champ électromagnétique

**Exercice 9 - Bilan d'énergie dans un conducteur cylindrique :** On considère un conducteur cylindrique d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $R$ , de hauteur  $h \gg R$  et de conductivité  $\sigma$ . Le conducteur est parcouru par un courant  $I$  uniformément réparti dans tout le volume.

1. Comment s'écrit le champ électrique  $\vec{E}$  dans le conducteur ?
2. Déterminer le champ magnétique en tout point du conducteur.
3. Déterminer le vecteur de Poynting en tout point du conducteur. Calculer son flux à travers la surface entourant le conducteur. Commenter.
4. Vérifier et commenter par calcul direct la conservation locale et globale de l'énergie. La divergence d'un vecteur radial en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{X} = \frac{1}{r} \frac{d(rX)}{dr}.$$

**Exercice 10 - Bilan d'énergie dans un condensateur en ARQS :** On considère un condensateur constitué de plaques de rayon  $R$ , disposé en série avec une résistance. L'intérieur du condensateur est un isolant électrique vide de courants et de charges. Le circuit est alimenté par une tension  $U(t) = U_0 \cos \omega t$ . On se place dans la limite  $R \ll c/\omega$ .

1. Écrire les équations de Maxwell à l'intérieur du condensateur. Que valent les champ électrique et magnétique dans le condensateur ?
2. Calculer en fonction de  $Q(t)$  (charge d'une des plaques),  $I(t)$  (courant circulant dans le circuit),  $c$  et  $R$  le rapport

$$x = \frac{B^2}{\varepsilon_0 \mu_0 E^2},$$

calculé en  $r = R$ . Conclure sur la valeur de  $x$  en calculant un ordre de grandeur du rapport  $Q/I$ .

3. Calculer le vecteur de Poynting associé, puis le flux d'énergie à travers la surface latérale du condensateur. À quoi correspond ce flux ?
4. Vérifier sur cet exemple le théorème de Poynting.

**Exercice 11 - Câble coaxial en régime statique :** On considère un câble coaxial de longueur  $\ell$ , constitué de deux cylindres d'axe commun  $(Oz)$ , parfaitement conducteurs, de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ . On suppose  $\ell \gg R_2$ . Le cylindre intérieur est porté au potentiel  $V_1$ , porte une charge linéique  $\lambda$  et est parcourue par un courant  $I$ . Le cylindre extérieur est porté au potentiel  $V_2 = V_1 - U$ , porte une charge linéique  $-\lambda$  et est parcouru par le courant  $-I$ .

1. Calculer les charges surfaciques  $\sigma_i$  portées par chacun des cylindres.
2. En déduire le champ  $\vec{E}$  en tout point ainsi que la densité d'énergie électrique associée. En déduire la densité d'énergie linéique  $w_E$ .
3. En déduire la capacité linéique  $\Gamma$  du câble.
4. Calculer les courants surfaciques sur les deux conducteurs, et en déduire le champ magnétique.
5. Calculer la densité linéique  $w_B$  d'énergie magnétique. En déduire l'inductance linéique  $\Lambda$ .
6. Quelle est la valeur du produit  $\Gamma\Lambda$  ? Quelle est sa dimension ?
7. Quelle impédance peut-on former à partir de  $\Lambda$  et  $\Gamma$  ? Trouver son expression en fonction de  $R_1$  et  $R_2$ .
8. Calculer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  dans le câble, ainsi que le flux d'énergie  $\Phi$  associé. Commenter.

**Exercice 12 - Rayon classique de l'électron :** L'observation d'un électron isolé dans un piège de Penning démontre que le rayon de cette particule est inférieur à  $10 \times 10^{-22}$  m.

On souhaite représenter classiquement un électron. Pour cela, on suppose qu'il est représenté par une sphère de rayon  $R_c$  uniformément chargée en volume, trouver une expression du rayon  $R_c$  en identifiant l'énergie électrostatique de cette distribution avec l'énergie de masse  $m_e c^2$  de l'électron, qui correspond à l'énergie mécanique de la particule dans un référentiel où elle est au repos. Proposer un ordre de grandeur sachant que  $m_e c^2 = 511$  keV et conclure. On rappelle  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19}$  J.

Éléments de réponse :

<p>9 - 1. <math>\vec{E} = \frac{I}{\pi R^2 \sigma} \vec{e}_z</math>; 2. <math>\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta</math>.</p> <p>10 - 1. <math>\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z</math> et <math>\vec{B} = \mu_0 \frac{r}{2S} I(t)</math>; 2.</p>	$x = \left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 \ll 1$ ; 3. $\Phi = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C}\right)$ .	<p>4. <math>\frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}</math>; 5. <math>w_B = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)</math>; 6. <math>\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)</math>.</p> <p>11 - 2. <math>w_E = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)</math>; 3. <math>\Gamma =</math></p> <p>12 - <math>R_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}</math>.</p>
---	---	--

## 4 Propagation du champ électromagnétique dans le vide

**Exercice 13 - Onde électromagnétique plane progressive :** On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est :

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y \quad \text{avec} \quad E_x = E_0 \exp\left(i\left(\frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t\right)\right)$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est  $\lambda = 600 \text{ nm}$ .

1. Calculer la fréquence de l'onde.
2. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?
3. Calculer la valeur numérique de la constante  $k$ .
4. Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.
5. Exprimer  $E_y$  en fonction de  $E_x$ .
6. Calculer les champ magnétique  $\vec{B}$  de cette onde.
7. Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.
8. Calculer le vecteur de Poynting de cette onde et sa moyenne temporelle.

**Exercice 14 - Polarisation d'ondes :**

1. On considère une OPPM monochromatique de pulsation  $\omega$  dont les composantes complexes sont données par

$$\underline{\vec{E}} = E_0(\vec{e}_y + j\alpha \vec{e}_z) \exp[j(\omega t - kx)]$$

avec  $\alpha$  un réel.

- (a) Quelle condition doit vérifier  $\alpha$  pour que l'onde soit polarisée rectilignement ?
- (b) Et circulairement ?
2. On considère une onde polarisée circulairement dont l'expression est

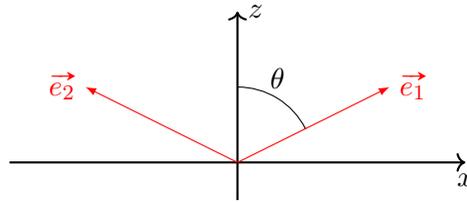
$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y + E_0 \sin(kx - \omega t) \vec{e}_z .$$

- (a) Préciser le sens de polarisation de cette onde.
- (b) Donner l'expression de son amplitude complexe  $\underline{\vec{E}}$ .
- (c) Quelle serait l'expression du champ  $\vec{E}'$  polarisé circulairement en sens inverse ayant la même amplitude ? Quelle serait l'expression de son amplitude complexe ?

**Exercice 15 - Étude de l'OPPM associée à un rayon laser :** On considère un faisceau laser de puissance moyenne  $\langle P \rangle = 1 \text{ mW}$  et de section  $s = 4 \text{ mm}^2$  modélisé par une onde électromagnétique monochromatique se propageant dans le vide dont le champ électrique est de la forme :  $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(k(z - ct) + \phi_0) \vec{e}_x$ .

1. Décrire précisément les différents termes intervenant dans cette écriture et leur signification physique. Décrire l'état de polarisation. Montrer en écrivant la relation de dispersion liant la norme du vecteur d'onde  $k$  à la pulsation  $\omega$ , que l'on peut écrire de façon équivalente  $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \phi_0) \vec{e}_x$ .
2. Exprimer le champ magnétique attaché à cette onde.
3. Exprimer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$ . En déduire l'expression littérale de l'amplitude du champ électrique  $E_0$  en fonction de la puissance moyenne  $\langle P \rangle$  et de  $s$ , de la célérité de la lumière dans le vide et de  $\epsilon_0$ . Donner sa valeur numérique. On rappelle que  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**Exercice 16 - Interférences :** On étudie l'onde résultant de la superposition dans le vide de deux ondes électromagnétiques planes de même pulsation  $\omega$ , de même amplitude  $E_m$ , polarisées rectilignement suivant  $(Oy)$ . Elles se propagent selon deux directions  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ , contenues dans le plan  $(Oxz)$  et faisant entre elles un angle  $2\theta$  :  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2\theta$ . L'axe  $(Oz)$  est choisi tel que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_z) = \theta$  :



1. Établir l'expression du champ électrique résultant . Quelle est sa vitesse de phase  $v_\phi$  ? L'onde est-elle plane ?
2. Donner l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$ .
3. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  et en déduire la répartition de l'éclairement (donné par le carré de la la norme du vecteur de Poynting) sur une surface perpendiculaire à  $\vec{\Pi}$ . Commenter.

**Exercice 17 - Pression de radiation : aspect corpusculaire :** L'énergie  $\mathcal{E}$  et la quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un photon sont données respectivement par  $\mathcal{E} = h\nu$  et  $\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{\mathcal{E}}{c} \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire dirigé dans le sens de propagation. On considère une interface vide/metal où un flux unidimensionnel constitué de  $n$  photons par unité de volume est dirigé vers un miroir métallique. On note  $E_0$  l'amplitude du champ électrique.

1. À l'aide d'un bilan de quantité de mouvement, calculer la force exercée par le flux de photons sur la surface  $S$  du miroir, et en déduire la pression.
2. En notant  $\vec{p}$  la quantité de mouvement contenue dans le champ, on a la relation  $\vec{p} = \vec{\Pi}/c^2$  avec  $\vec{\Pi}$  le vecteur de Poynting. Interpréter le résultat précédent.
3. Interpréter le résultat obtenu.

<p><b>Éléments de réponse :</b></p> <p><b>13</b> - 1. <math>5 \times 10^{14}</math> Hz; 3. <math>1.05 \times 10^7 \text{ m}^{-1}</math> ;                  4. <math>2x + 2y + z = \text{Cte}</math>; 5. <math>E_y = -E_x</math>; 6  <math>\vec{B} = \frac{E_x}{3c}(\vec{e}_x + \vec{e}_y - 4\vec{e}_z)</math>.</p> <p><b>14</b> - 1. a. <math>\alpha = 0</math>; b. <math>\alpha = \pm 1</math>; 2. <math>\vec{E} =</math></p>	<p><math>E_0(\vec{e}_y - j\vec{e}_z)</math> et <math>\vec{E}' = E_0(\vec{e}_y + j\vec{e}_z)</math>.</p> <p><b>15</b> - 2. <math>\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(k(z - ct) + \phi_0)\vec{e}_y</math>; 3. <math>434 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}</math>.</p> <p><b>16</b> - 1. <math>\vec{E} = \frac{2E_m \exp[j\omega t - j\frac{\omega}{c}z \cos \theta]}{\cos \theta} \vec{e}_x</math>, <math>v_\phi = \frac{c}{\cos \theta}</math>;</p>	<p>2. <math>\vec{B} = \frac{2E_m}{c} [-\cos \theta \cos(k_0 x \sin \theta)\vec{e}_x - j \sin \theta \sin(k_0 x \cos \theta)\vec{e}_z] e^{j\omega t - jk_0 z \cos \theta}</math> ; 3.  <math>\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{2E_m^2}{\mu_0 c} \cos \theta \cos^2(k_0 x \sin \theta)\vec{e}_z</math>.</p> <p><b>17</b> - 3. <math>\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = n\hbar\omega</math>.</p>
--	--	---

## 5 Propagation du champ électromagnétique dans les milieux

**Exercice 18 - Onde progressive non plane :** On s'intéresse à une solution de l'équation de d'Alembert de la forme :

$$X(x, y, z, t) = \mathcal{A} \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right) \cos(\omega t - kx).$$

1. Montrer qu'il existe une relation entre  $k$ ,  $c$ ,  $a$  et  $\omega$ .
2. Montrer que cette onde ne pourra se propager que si  $\omega > \omega_0$ . Déterminer  $\omega_0$ .

**Exercice 19 - Ondes dans un électrolyte :** Dans cet exercice, on cherche à modéliser l'impact d'une faible conductivité sur la propagation des ondes électromagnétiques. Cela impose notamment de rechercher une relation de dispersion dans un milieu matériel.

On s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques dans l'eau de mer, modélisée comme un électrolyte (solution contenant des ions responsables du transport du courant) de densité de charge  $\rho = 0$  (le milieu est donc localement neutre), de permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r = 80$  et par sa conductivité  $\sigma \simeq 6 \text{ S/m}$  (on notera la faible conductivité, liée à la nature des porteurs de charge).

1. Écrire les équations de Maxwell dans le milieu étudié. On admet que la nature du milieu consiste à remplacer  $\epsilon_0$  par  $\epsilon_r \epsilon_0$ .
2. Déterminer l'équation de propagation du champ électrique.
3. Déterminer la relation de dispersion du milieu, et la commenter.
4. Quel est le domaine de fréquence à privilégier pour la communication sous-marine ?

Éléments de réponse :

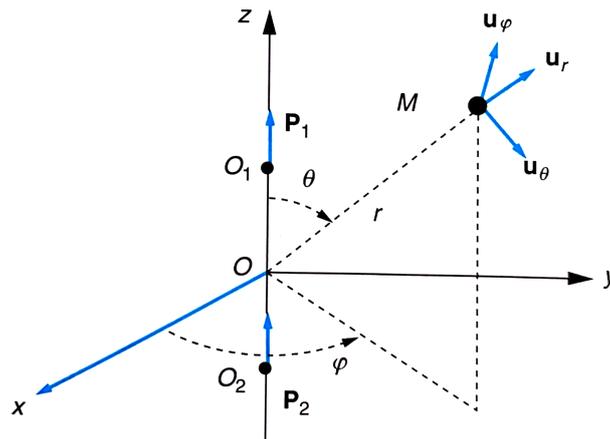
$$18 - 1. \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{4a^2}.$$

$$19 - 3. \underline{k}^2 = \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} - j\omega\sigma\mu_0.$$

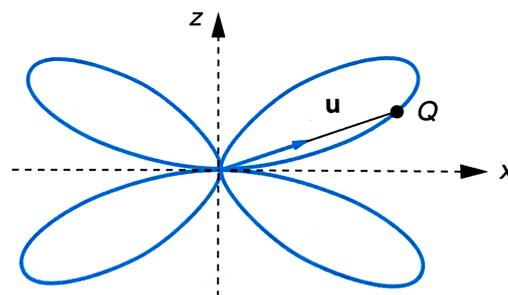
## 6 Dipôle rayonnant

**Exercice 20 - Modèle élémentaire d'antenne :** Deux dipôles oscillants de moments dipolaires  $\mathbf{p}_1 = p_0 \cos(\omega t - \omega a/c)\mathbf{u}_z$  et  $\mathbf{p}_2 = p_0 \cos(\omega t + \omega a/c)\mathbf{u}_z$  sont placés aux points  $O_1$  et  $O_2$  de l'axe  $Oz$  de cotes respectives  $z_1 = a$  et  $z_2 = -a$ . En un point  $M$  éloigné, on peut considérer que les champs ont été émis par  $O$  pour exprimer tous les facteurs géométriques  $r_1/c = O_1M/c$  et  $r_2/c = O_2M/c$ . Ces deux dipôles rayonnent alors un champ électrique de la forme :

$$\mathbf{E} = (\ddot{p}_1(t - r_1/c) + \ddot{p}_2(t - r_2/c)) \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \mathbf{u}_\theta .$$



1. Exprimer  $r_1$  et  $r_2$  en fonction de  $r$ ,  $a$  et  $\theta$  en limitant les calculs à l'ordre 1 en l'infiniment petit  $a/r$ .
2. En admettant qu'à grande distance, l'onde est localement plane de direction de propagation  $\mathbf{u}_r$ , en déduire l'expression du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .
3. En déduire l'expression de la norme du vecteur de Poynting.
4. Dans le cas d'une antenne demi-onde, c'est-à-dire telle que  $2\omega a/c = \pi$ , on a tracé ci-dessous l'indicatrice de rayonnement en portant dans chaque direction  $\mathbf{u}_r$  du plan une longueur proportionnelle à la moyenne de la norme du vecteur de Poynting à  $r$  fixé. Commenter l'allure de cette indicatrice. Dans quelle direction la puissance moyenne rayonnée est nulle? Interpréter sans calculs.



**Exercice 21 - Calcul classique de la durée de vie d'une transition atomique :** Un électron est en orbite circulaire de rayon  $r$  autour d'un proton considéré comme infiniment massif et immobile à l'origine  $O$  du repère. On néglige toute correction relativiste.

1. Calculer la vitesse  $v$  et l'accélération  $a$  de l'électron, la période  $T$  de son mouvement et l'énergie mécanique  $\mathcal{E}$  de ce système en fonction de  $r$ ,  $e$  et  $m_e$ . Évaluer ces quantités pour  $r = 0.1$  nm, l'approximation non relativiste est-elle justifiée?

On rappelle la formule de Larmor qui indique la puissance moyenne rayonnée par un dipôle  $p(t)$  vaut

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \langle \ddot{p}(t)^2 \rangle .$$

- Dans les conditions de la première question, calculer numériquement l'énergie perdue sur un tour  $\Delta\mathcal{E}$  et en déduire  $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ .
- En déduire que le rayon ne peut pas rester constant et calculer sa variation relative à chaque tour.
- En admettant, comme le montre l'exemple précédent, qu'à chaque révolution, l'orbite de l'électron reste circulaire avec une bonne approximation, déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $r$  et en déduire sa loi d'évolution.
- En déduire le temps à partir duquel le rayon devient nul. Que pouvez vous en conclure ?

On montre en mécanique classique que les niveau électroniques d'un électron autour d'un noyau d'hydrogène sont donnés par  $\mathcal{E}_n = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2}$  avec  $\mathcal{E}_0 = 13.6 \text{ eV}$ .

- En utilisant le modèle classique précédent, calculer le temps  $\tau$  nécessaire pour que l'énergie passe de la valeur  $\mathcal{E}_2$  à la valeur  $\mathcal{E}_1$ . L'expérience montre que le temps de transition vaut  $\tau' = 1.3 \times 10^{-9} \text{ s}$ , conclusion ?

Données :  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ , charge élémentaire  $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ , masse de l'électron  $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

<p><b>Éléments de réponse :</b></p> <p><b>20</b> - 1. <math>r_1 \approx r - a \cos \theta</math>, <math>r_2 = r + a \cos \theta</math>; 2. <math>\mathbf{B} = -\frac{1}{c} \frac{\mu_0 \sin \theta \omega^2 p_0}{2\pi r} \cos(\omega(t - r/c)) \mathbf{u}_\varphi</math>; 3. <math>\langle \Pi \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{8c\pi r^2} \sin^2 \theta \cos^2(\omega a(1 - \cos \theta)/c)</math>.</p>	<p><b>21</b> - 1. <math>v = 1.6 \times 10^6 \text{ m/s}</math>, <math>a = 2.53 \times 10^{22} \text{ m/s}^2</math> et <math>\mathcal{E} = -1.2 \times 10^{-18} \text{ J}</math>; 2. <math> \Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}  = 1.25 \times 10^{-6}</math>; 3. <math> \Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}  =  \Delta r/r </math>; 4. <math>r^3(t) = r_0^3 - e^4 t / (4\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m_e^2)</math>.</p>
---	---

## 7 Champ aux interfaces

**Exercice 22 - Coefficients de réflexion et de transmission avec une incidence normale :** On considère deux milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes. Dans la région  $z < 0$ , l'indice du milieu est  $n_1$ . Dans la région  $z > 0$ , l'indice du milieu est  $n_2$ . On rappelle qu'on a  $n = \frac{ck}{\omega}$  avec  $k$  le nombre d'onde. Au point d'incidence  $I$ , une partie de l'onde est réfléchi et l'autre partie est transmise. Les champs électriques incident, réfléchi et transmis se mettent respectivement sous la forme :  $\vec{E}_i = E_0 \exp[j(\omega t - k_1 z)] \vec{e}_y$ ,  $\vec{E}_r = r E_0 \exp[j(\omega t + k_1 z)] \vec{e}_y$  et  $\vec{E}_t = t E_0 \exp[j(\omega t - k_2 z)] \vec{e}_y$ . Il n'y a ni charge, ni courants à l'interface.

- Déterminer les coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$  en amplitude pour le champ électrique en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .
- Calculer les vecteurs de Poynting moyens incidents, réfléchis et transmis. En déduire les coefficients en puissance de réflexion  $R = |\langle \Pi_r \rangle| / |\langle \Pi_i \rangle|$  et de transmission  $T = |\langle \Pi_t \rangle| / |\langle \Pi_i \rangle|$ . Que vaut  $R + T$ ? Comment l'interpréter ?

**Exercice 23 - Couche anti-reflet :** Un milieu transparent, d'indice  $N$ , est limité par une surface plane. Cette surface est recouverte par une couche mince transparente d'indice  $n$  et d'épaisseur uniforme  $e$ . Une onde plan progressive monochromatique incidente  $\vec{E}_1$  provient de l'air et tombe sur la surface  $x = 0$  sous incidence normale. Elle donne naissance à une onde réfléchi  $\vec{E}'_1$  et une onde transmise  $\vec{E}_2$ . L'onde  $\vec{E}_2$  tombe sur la surface  $x = e$ . Elle donne naissance à une onde réfléchi  $\vec{E}'_2$  et une onde transmise  $\vec{E}_3$ .

On rappelle que l'indice optique est donné par  $n = \frac{ck}{\omega}$  avec  $k$  le nombre d'onde. Il n'y a ni charge, ni courants à l'interface.

- Faire un schéma en représentant les différents champs.
- Déterminer  $r = \frac{E'_1}{E_1}$  le coefficient de réflexion en amplitude dans le cas où  $e = \lambda/(4n)$ .
- Comment doit-on choisir  $n$  pour éliminer les pertes de lumière par réflexion? Application numérique pour  $N = 1.8$ .
- Quelle est l'épaisseur correspondante pour  $\lambda = 560 \text{ nm}$  ?

**Exercice 24 - Onde confinée entre deux plans conducteurs :** On souhaite étudier le guidage d'une onde électromagnétique à l'aide d'un guide d'ondes métallique simple constitué de deux plans conducteurs parfaits parallèles placés en  $z = 0$  et  $z = a$ . Une onde EM se propage entre eux, de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(z) \sin(kx - \omega t) \vec{e}_y.$$

1. Calculer  $E(z)$ . Montrer que la propagation ne peut se faire que selon des modes indicés par un entier  $n$ , et exprimer les vecteurs d'onde  $k_n$  pour une pulsation  $\omega$  fixée. Déterminer la relation de dispersion, ainsi que la pulsation de coupure  $\omega_c$ .
2. Calculer les vitesses de phase  $v_\varphi$  et de groupe  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ .

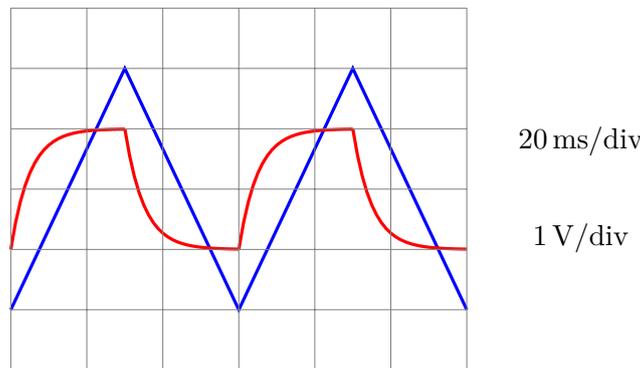
Éléments de réponse :

<p><b>22</b> - 1. <math>t = 2n_1/(n_1 + n_2)</math>, <math>r = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)</math>; 2. <math>R =  t ^2</math>, <math>T = n_2 t ^2/n_1</math>,</p>	<p><math>R + T = 1</math>.</p> <p><b>23</b> - 2. <math>r = (N - n^2)/(N + n^2)</math>; 4. <math>e = 0.104 \mu\text{m}</math>.</p>	<p><b>24</b> - 1. <math>k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}</math>; 2. <math>v_g = \frac{kc^2}{\omega} = c\sqrt{1 - \frac{n^2\pi^2 c^2}{\omega^2 a^2}}</math>.</p>
--	---	---

## 8 Sujets d'oraux

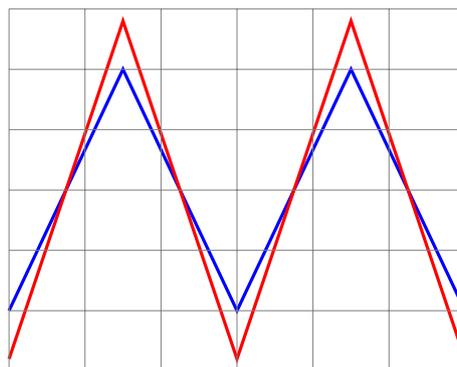
**Exercice 25 - Couplage inductif (Centrale) :** On considère deux bobines (1) et (2). La bobine (1) est d'inductance  $L_1 = 0.20 \text{ H}$  et de résistance interne  $r$ . Elle est branchée en série avec un GBF (de résistance interne négligeable et délivrant une tension triangulaire). L'ensemble forme le circuit (1). La seconde bobine est en circuit ouvert et forme le circuit (2). On note  $M$  l'inductance mutuelle entre les deux circuits.

On branche la voie 1 de l'oscilloscope aux bornes du générateur, la voie 2 aux bornes du circuit (2) et on obtient l'oscillogramme :



1. Déterminer  $M$  et  $r$ .

On modifie un paramètre et on observe l'oscillogramme suivant :



2. Indiquer quel paramètre du signal d'entrée a été modifié et quelle modification des réglages de l'oscilloscope a été effectué.

Éléments de réponse : | **25** - 1.  $r = 50 \Omega$  et  $M = 1.5 \text{ mH}$ . |

## 9 Pour aller plus loin...

**Exercice 26 - Guidage d'une onde électromagnétique par un métal :** Une onde EM dont les champs électrique et magnétique sont définis par leurs composantes en coordonnées cartésiennes se propage suivant

la direction  $Oz$  d'un guide d'onde dont la section droite est un rectangle de largeur  $a$  suivant  $Ox$  et de longueur  $b$  suivant  $Oy$ . Le guide enferme de l'air, et ses parois sont parfaitement conductrices.

On rappelle les conditions de passage. On note les champs électromagnétique au niveau de l'interface  $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$  le milieu 1 et  $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$  le milieu 2. On note  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  le vecteur unitaire orthogonal à l'interface allant du milieu 1 au milieu 2. Les relations de passage indiquent

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}.$$

1. En calculant la puissance dissipée par unité de volume dans un conducteur de conductivité finie  $\gamma$ , justifier pourquoi le champ électrique est nul dans la limite  $\gamma \rightarrow \infty$  dans le conducteur.
2. Montrer alors que  $\vec{B} = c\vec{t}e$ . On prendra cette constante nulle. En déduire à l'aide des conditions aux limites vérifiées par le champ électromagnétique sur les parois du guide que la composante du champ électrique parallèle à la paroi vérifie  $\vec{E}_{//} = 0$  et que la composante du champ magnétique orthogonale à la paroi vérifie  $\vec{B}_{\perp} = 0$ .
3. On cherche les composantes du champ sous la forme  $X_i(\vec{r}, t) = X_i(x, y)e^{j(k_g z - \omega t)}$ . Montrer à l'aide des équations de Maxwell que les composantes  $E_x, E_y, B_x, B_y$  se déduisent toutes des composantes  $E_z$  et  $B_z$  en notant

$$\begin{aligned} E_z &= E_m(x, y)e^{j(k_g z - \omega t)} \\ B_z &= B_m(x, y)e^{j(k_g z - \omega t)}, \end{aligned}$$

$k_g$  étant le module du vecteur d'onde de propagation de l'onde guidée. On posera également  $k^2 = \omega^2/c^2$ .

4. Montrer que les équations de propagation de  $E_z$  et  $B_z$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z &= 0. \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + k_c^2 B_z &= 0. \end{aligned}$$

Donner en particulier la relation entre  $k, k_g$  et  $k_c$ .

5. On se place maintenant dans le cas d'une onde transverse électrique (TE), pour laquelle la composante longitudinale du champ électrique est nulle.
  - (a) Déterminer l'expression de  $B_m(x, y)$  en supposant une solution à variables séparées de la forme  $B_m(x, y) = f(x)g(y)$ . On posera  $\frac{d^2 f}{dx^2} = -p^2 f$  et  $\frac{d^2 g}{dy^2} = -q^2 g$
  - (b) Quelle est la relation entre  $p^2, q^2$  et  $k_c^2$  ?
  - (c) Donner la solution générale  $B_z(x, y)$ .
  - (d) Montrer que, dans le cadre d'une onde transverse électrique, les dérivées de  $f$  et  $g$  sont nulles sur les interfaces.
  - (e) Montrer que la solution est de la forme

$$B_z = B_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi y}{b}\right) e^{j(k_g x - \omega t)}.$$

- (f) Donner  $k_c$  en fonction de  $\ell, n, a$ , et  $b$ .
6. Un mode est caractérisé par un couple de valeurs  $\ell$  et  $n$ .
    - (a) Donner l'expression des composantes de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .
    - (b) Montrer que pour que le mode  $(m, n)$  puisse se propager,  $\omega$  doit être supérieure à une valeur  $\omega_c$  que l'on déterminera.
  7. Déterminer le vecteur de Poynting et montrer que seule la composante suivant  $Oz$  a une valeur moyenne non nulle.
  8. Achever la caractérisation de la propagation dans ce guide d'ondes en calculant la vitesse de phase et la vitesse de groupe  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ . Commenter.

**Exercice 27 - Propagation dans un milieu chiral :** Un milieu chiral est un milieu transparent où les ondes circulaires droites (CD) et gauches (CG) ne se propagent pas à la même vitesse, ce qui se traduit par l'existence de 2 indices de réfraction : pour les ondes CG (resp. CD), l'indice est  $n_g$  (resp.  $n_d$ ).

On envoie dans un milieu chiral une OPPH initialement polarisée rectilignement selon  $(Oz)$  et se propageant dans la direction  $(Ox)$ , dans le sens des  $x$  croissants. On suppose qu'à l'interface entre le vide et le milieu chiral (correspondant au plan  $x = 0$ ) la pulsation de l'onde ne varie pas. On suppose également que dans un milieu transparent, le champ électromagnétique se propage exactement de la même manière que dans le vide, à la condition de remplacer  $c$  par  $c/n$ , où  $n$  est l'indice du milieu.

1. Quelle est l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu d'indice  $n$ ? Comment est modifiée la relation de dispersion par rapport au vide?
2. Montrer qu'une onde polarisée rectilignement peut s'écrire comme la somme de deux ondes polarisées circulairement et de sens contraires (polarisation circulaires gauche et droite, CG et CD).
3. Comment s'exprime alors l'onde pénétrant dans le milieu chiral?
4. Quelle est, après la traversée d'une cuve de longueur  $\ell$ , la polarisation de l'onde? Caractériser le changement observé.

**Exercice 28 - Effet Faraday dans un plasma :** On s'intéresse ainsi à la propagation d'OPPH polarisées circulairement, de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{e}_z$  dans un plasma localement neutre, comportant  $n$  électrons et  $n$  ions (supposés fixe, ce qui revient à faire l'approximation (largement vérifiée)  $m_{\text{ion}} \gg m_e$ ) par unité de volume. On impose un champ magnétique statique  $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$  devant lequel le champ magnétique de l'onde est négligeable.

1. Calculer la conductivité complexe  $\gamma$  du plasma en présence du champ magnétique. En accord avec une limite haute fréquence  $\omega \gg 1/\tau$ , on négligera le terme d'amortissement. Montrer en particulier que cette conductivité se met sous forme d'une matrice. On pourra notamment faire apparaître la pulsation cyclotron  $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$ .
2. Montrer que les vecteurs d'onde satisfont à l'équation suivante :

$$k^4 - 2F(\omega, \omega_c, \omega_P)k + F^2(\omega, \omega_c, \omega_P) - G^2(\omega, \omega_c, \omega_P) = 0,$$

avec  $\omega_P = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e\epsilon_0}}$  la pulsation plasma associée aux électrons et :

$$F(\omega, \omega_c, \omega_P) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_P^2}{c^2} \frac{1}{1 - \omega_c^2/\omega^2}$$

$$G(\omega, \omega_c, \omega_P) = \frac{\frac{\omega_P^2}{c^2} \omega_c}{1 - \omega_c^2/\omega^2}.$$

On rappelle que puisque l'onde est une OPPH se propageant suivant  $(Oz)$ , le champ électrique n'a pas de composante suivant cet axe.

3. On note  $k_D$  et  $k_G$  les vecteurs d'onde solution de l'équation précédente, et on admet qu'ils sont associés respectivement aux polarisations circulaire droite et gauche. Dans une limite de bas champ  $\omega_c \ll \omega$ , exprimer  $k_D - k_G$  à l'ordre 2 en  $\omega_P/\omega$  :

$$k_G - k_D \simeq \frac{\omega_P^2 \omega_c}{\omega^2 c}.$$

4. Le plasma est confiné entre les plans  $z = 0$  et  $z = \ell$ . Quelle est la polarisation dans le plan  $z = \ell$  d'une onde engendrée par une onde incidente polarisée rectilignement selon  $\vec{e}_x$ , dans le plan  $z = 0$ ? Comment s'exprime l'angle  $\alpha$  dont a tourné la polarisation en sortie du plasma?

Éléments de réponse :

<p>26 - 4. <math>k_c^2 = k^2 - k_g^2</math>; 5. <math>p^2 + q^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{\ell^2\pi^2}{b^2}</math>; 6. <math>\omega_c(n, \ell) = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{\ell^2\pi^2}{b^2}}</math>; 8. <math>v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2(n, \ell)}{\omega^2}}</math>.</p>	<p>27 - 2. <math>\vec{E} = \frac{E_0}{2} [\sin(\omega t - kx)\vec{e}_y + \cos(\omega t - kx)\vec{e}_z] + \frac{E_0}{2} [-\sin(\omega t - kx)\vec{e}_y + \cos(\omega t - kx)\vec{e}_z]</math></p>	<p>3. <math>\vec{E}(\ell, t) = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - \varphi_0) [\cos \frac{\Delta\varphi}{2} \vec{e}_z - \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \vec{e}_y]</math> avec <math>\Delta\varphi/2 = -(n_D - n_G) \frac{\pi\ell}{\lambda_0}</math>.</p> <p>28 - 4. <math>\alpha = \frac{(k_D - k_G)\ell}{2} = \frac{\omega_P^2 \omega_c \ell}{\omega^2 c 2}</math>.</p>
---	--	--